

成都市 2018 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. A; 2. D; 3. C; 4. B; 5. D; 6. A; 7. B; 8. C; 9. C; 10. B; 11. C; 12. B.

第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. -1 ; 14. 3 ; 15. $\frac{1}{2}$; 16. $b < c < a$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由已知及正弦定理,得 $\sqrt{2} \sin B \cos C - \sin A \cos C = \sin C \cos A$2 分

$\therefore \sqrt{2} \sin B \cos C = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin(A + C)$3 分

$\because A + C = \pi - B$, $\therefore \sin(A + C) = \sin B$.

$\therefore \sqrt{2} \sin B \cos C = \sin B$4 分

又 $\because \sin B \neq 0$, $\therefore \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$5 分

$\because C \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{\pi}{4}$6 分

(II)由已知及余弦定理,得 $ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2$8 分

化简,得 $a^2 = 2b^2$9 分

又 $\because a = \sqrt{2}$, $\therefore b = 1$10 分

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$12 分

18. 解:(I)由题意,知 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$,1 分

$\bar{y} = \frac{2.90+3.30+3.60+4.40+4.80+5.20+5.90}{7} = 4.30$,2 分

$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = (1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (7-4)^2 = 28$3 分

$\therefore r = \frac{14.00}{\sqrt{28 \times 7.08}} = \frac{14.00}{\sqrt{198.24}} \approx \frac{14.00}{14.10} \approx 0.99$5 分

因为 y 与 x 的相关系数近似为 0.99,所以 y 与 x 的线性相关程度相当大,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.6 分

$$(II) \because \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{14}{28} = 0.5, \quad \dots\dots 8 \text{分}$$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 4.3 - 0.5 \times 4 = 2.3. \quad \dots\dots 9 \text{分}$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程为 } \hat{y} = 0.5x + 2.3. \quad \dots\dots 10 \text{分}$$

将 $x = 10$ 代入线性回归方程, 得 $\hat{y} = 0.5 \times 10 + 2.3 = 7.3$.

\therefore 估算该种机械设备使用 10 年的失效费为 7.3 万元. $\dots\dots 12 \text{分}$

19. 解: (I) 如图, 在棱 AC 上取点 G 满足 $CG = 2AG$, 连接 EG, FG . $\dots\dots 1 \text{分}$

$$\because \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FA}, \therefore FG \parallel BC \text{ 且 } FG = \frac{1}{3}BC.$$

又由题意, 可得 $DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{3}BC$.

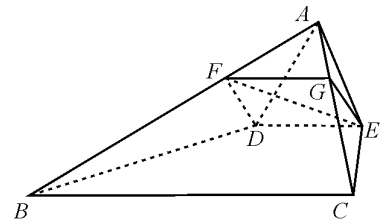
$$\therefore DE = FG \text{ 且 } DE \parallel FG.$$

\therefore 四边形 $DEGF$ 为平行四边形.

$$\therefore DF \parallel EG.$$

又 $\because DF \not\subset$ 平面 $ACE, EG \subset$ 平面 $ACE,$

$$\therefore DF \parallel \text{平面 } ACE. \quad \dots\dots 3 \text{分}$$



$\therefore DF \parallel$ 平面 $ACE. \quad \dots\dots 5 \text{分}$

(II) 如图, 分别取 DE, BC 的中点 M, N , 连接 AM, MN, BM .

由题意, 知 $MN \perp BC, AM = 2, MN = 4, BN = 3$.

$$\text{在 Rt } \triangle BMN \text{ 中, } BM = \sqrt{BN^2 + MN^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\text{在 } \triangle ABM \text{ 中, } \because AB = \sqrt{29}, \therefore AM^2 + BM^2 = 2^2 + 5^2 = 29 = AB^2.$$

$$\therefore AM \perp BM.$$

又 $AM \perp DE, BM \cap DE = M, BM, DE \subset$ 平面 $BCED,$

$$\therefore AM \perp \text{平面 } BCED. \quad \dots\dots 6 \text{分}$$

以 M 为坐标原点, $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MA}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Mxyz$.

$$\text{则 } M(0, 0, 0), A(0, 0, 2), B(4, -3, 0),$$

$$C(4, 3, 0), D(0, -1, 0), E(0, 1, 0),$$

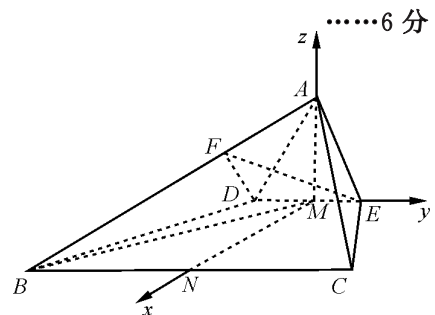
$$F\left(\frac{4}{3}, -1, \frac{4}{3}\right).$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = (4, 2, 0), \overrightarrow{EA} = (0, -1, 2), \overrightarrow{DE} = (0, 2, 0), \overrightarrow{DF} = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right). \quad \dots\dots 7 \text{分}$$

设平面 ACE 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 平面 DEF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EA} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 4x_1 + 2y_1 = 0 \\ -y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}. \text{ 令 } z_1 = 1, \text{ 得 } \mathbf{m} = (-1, 2, 1). \quad \dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2y_2 = 0 \\ \frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}z_2 = 0 \end{cases}. \text{ 令 } z_2 = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (-1, 0, 1). \quad \dots\dots 9 \text{分}$$



$$\therefore \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{平面 } ACE \text{ 与平面 } DEF \text{ 所成锐二面角的余弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (I) 由已知, 得 $a = 2$. \therefore 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. \dots\dots 1 分

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 经过点 } A(1, \frac{\sqrt{3}}{2}), \therefore \frac{1}{4} + \frac{3}{4b^2} = 1, \text{ 解得 } b^2 = 1. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由题意, 知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = ty - 1 (t \neq 0)$, $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty - 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (t^2 + 4)y^2 - 2ty - 3 = 0. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \Delta = 4t^2 + 12(t^2 + 4) = 16t^2 + 48 > 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{2t}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{3}{t^2 + 4}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$\therefore F$ 为点 E 关于 x 轴的对称点, $\therefore F(x_2, -y_2)$.

$$\therefore \text{直线 } DF \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1),$$

$$\text{即 } y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{t(y_1 - y_2)}(x - x_1). \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } y = 0, \text{ 则 } x &= x_1 + \frac{-ty_1^2 + ty_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{(ty_1 - 1)(y_1 + y_2) - ty_1^2 + ty_1 y_2}{y_1 + y_2} \\ &= \frac{2ty_1 y_2 - (y_1 + y_2)}{y_1 + y_2} = 2t \cdot \left(-\frac{3}{2t}\right) - 1 = -4. \end{aligned}$$

$$\therefore G(-4, 0). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle DEG \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2} |BG| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{3}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{\left(\frac{2t}{t^2 + 4}\right)^2 + \frac{12}{t^2 + 4}} = \frac{6\sqrt{t^2 + 3}}{t^2 + 4}. \end{aligned} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

令 $m = \sqrt{t^2 + 3}$, 则 $m \in (\sqrt{3}, +\infty)$.

$$\therefore S = \frac{6m}{m^2 + 1} = \frac{6}{m + \frac{1}{m}}.$$

$$\therefore m + \frac{1}{m} \in \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right), \therefore S \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\therefore \triangle DEG \text{ 的面积 } S \text{ 的取值范围为 } \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (I) 由已知, 可得 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} - \frac{a-1}{x} = \frac{(x+1)(x-a)}{x^2} (x > 0)$1分

①若 $a \leq 0$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 与 $f(x)$ 存在极值点矛盾;2分

②若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = a$.

\therefore 当 $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 存在唯一极小值点 $x = a$.

$\therefore f(a) = a + 1 - (a-1)\ln a - 2 = (a-1)(1 - \ln a) = 0$3分

$\therefore a = 1$ 或 $a = e$4分

(II) ①当 $a \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, e^2]$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上单调递增.

$\therefore f(1) = a - 1 \leq 0, f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a,$

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a = e^2 + a(\frac{1}{e^2} - 2) > 0;$

(ii) 当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a > 2\sqrt{a} - 2a = 2\sqrt{a}(1 - \sqrt{a}) \geq 0.$

$\therefore f(e^2) > 0.$

\therefore 由零点存在性定理, 知 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点;6分

②当 $1 < a < e^2$ 时,

\therefore 当 $x \in [1, a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (a, e^2]$ 时, $f'(x) > 0,$

$\therefore f(x)$ 在 $[1, a)$ 上单调递减, 在 $(a, e^2]$ 上单调递增.

$\therefore f(x)_{\min} = f(a) = (a-1)(1 - \ln a).$

(i) 当 $a = e$ 时, $f(x)_{\min} = 0$, 此时 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点;7分

(ii) 当 $1 < a < e$ 时, $f(x)_{\min} > 0$, 此时 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上无零点;8分

(iii) 当 $e < a < e^2$ 时, $f(x)_{\min} < 0, f(1) = a - 1 > 0.$

(a) 当 $f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a < 0$, 即 $\frac{e^4}{2e^2-1} < a < e^2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点;

(b) 当 $f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a \geq 0$, 即 $e < a \leq \frac{e^4}{2e^2-1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 2 个零点;

.....10分

③当 $a \geq e^2$ 时, $f'(x) \leq 0$ 在 $[1, e^2]$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上单调递减.

$\therefore f(1) = a - 1 > 0, f(e^2) = e^2 + (\frac{1}{e^2} - 2)a \leq e^2 + (\frac{1}{e^2} - 2)e^2 = -e^2 + 1 < 0,$

$\therefore f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点.11分

综上, 当 $1 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上无零点;

当 $a \leq 1$ 或 $a = e$ 或 $a > \frac{e^4}{2e^2-1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点;

当 $e < a \leq \frac{e^4}{2e^2-1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 2 个零点.12分

22. 解:(I)由曲线 C 的参数方程,得曲线 C 的普通方程为

$$(x-1)^2 + y^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

由极坐标与直角坐标的互化公式 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 得

$$\text{曲线 C 的极坐标方程为 } \rho = 2 \cos \theta, \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } l \text{ 的极坐标方程为 } \rho \cos \theta + \sqrt{3} \rho \sin \theta - 6 = 0, \text{ 即 } \rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 3. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II)设点 P 的极坐标为 (ρ_1, θ) , 点 Q 的极坐标为 (ρ_2, θ) , 其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{由(I)知 } |OP| = \rho_1 = \frac{6}{\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta}, |OQ| = \rho_2 = 2 \cos \theta. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{|OP|}{|OQ|} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{6}{2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta} = \frac{6}{1 + \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta} \\ &= \frac{6}{1 + 2 \sin(2\theta + \frac{\pi}{6})}. \end{aligned} \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} < 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}. \therefore -\frac{1}{2} < \sin(2\theta + \frac{\pi}{6}) \leq 1.$$

$$\therefore \text{当 } \sin(2\theta + \frac{\pi}{6}) = 1, \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } \frac{|OP|}{|OQ|} \text{ 取得最小值 } 2. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解:(I)当 $x < -1$ 时, $f(x) = -3x - 3 - 2x + 1 = -5x - 2 > 3$;1 分

$$\text{当 } -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } f(x) = 3x + 3 - 2x + 1 = x + 4 \in [3, \frac{9}{2}]; \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x > \frac{1}{2} \text{ 时, } f(x) = 3x + 3 + 2x - 1 = 5x + 2 > \frac{9}{2}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

综上,当 $x = -1$ 时, $f(x)_{\min} = 3, \therefore m = 3.$ 5 分

(II)由(I),即证 $(\frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a})(\frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b}) \geq 9.$

$$\because a, b \in (0, +\infty),$$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}, \frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore (\frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a})(\frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b}) \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} = 9. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 = \frac{b^2}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 = \frac{a^2}{b} \end{cases} \text{ 即 } a = b = 1 \text{ 时, 等号成立.} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$